بهبود بخشی نمودار پارتو در بهینه‌سازی توپولوژی چند هدفه با المان های چندضلعی غیریکنواخت★

مهناز اکبرزاغی[۱] بهروز احمدی ندوشن[۲]

چکیده *یکی از روش‌های پیشنهادی برای کاهش وزن سازه‌ها، معرفی فضاهای خالی در سازه است. این موضوع ایده‌ی اولیه شکل‌گیری بهینه‌سازی توپولوژی است. یکی از مشکلاتی که در مسائل بهینه‌سازی توپولوژی با المان‌های چهارضلعی مشاهده می‌شود، مسئله‌ی ایجاد پدیده‌ی شطرنجی است. به‌طورکلی گسسته‌سازی که تخمین بهتری از دامنه پیوسته ارائه دهد، ایجاد پدیده‌ی شطرنجی را کاهش می‌دهد. یک راهکار برای جلوگیری از پدیده‌ی شطرنجی در مسائل بهینه‌سازی توپولوژی استفاده از المان‌های چندضلعی است. در این مقاله، دو مثال با دامنه طراحی محدب و غیر محدب برای بررسی کاربرد المان‌های چندضلعی غیریکنواخت در بهینه‌سازی توپولوژی چندهدفه تحلیل شده و نتایج نشان دهنده کاهش زمان محاسبات و بهبود نمودار پارتو با المان غیریکنواخت می باشند.*

واژه‌های کلیدی بهینه‌سازی توپولوژی چندهدفه، نمودار پارتو، المان‌های چندضلعی، الگوریتم لوید، نمودار ورونوی.

Improvement of Pareto Diagrams in Topology Optimization Using Unstructured Polygonal Finite Element

M. Akbarzaghi B. Ahmadi-Nedushan

Abstract *One of approaches in weight reduction of structures is introduction of gaps in the design domain. This basic idea has led the formation of topology optimization algorithms. One of the problems frequently seen in topology optimization problems using common elements such as square or rectangular elements is the checkerboard phenomenon. Generally speaking, any discretization scheme that can better estimate the continuous design domain results in reducing the checkerboard phenomenon. In this article, the unstructured polygonal finite elements are used for discretization of design domain. Two examples corresponding to convex and nonconvex design domains are investigated and improved results and Pareto charts are presented in comparison to results obtained from using the square elements. The results demonstrate that using polygonal elements results in preventing the checkerboard phenomenon and reduction of computation time.*

Key Words Multi-objective topology optimization;pareto diagram; polygonal finite element; Lloyd's algorithm; Voronoi diagrams.

★ تاریخ دریافت مقاله ۹۵/٤/۲٦ و تاریخ پذیرش آن ٩٦/٦/٣٠ می‌باشد.

(۱) نویسندهٔ مسئول، کارشناسی ارشد، گروه عمران، دانشکده فنی و مهندسی و دانشگاه یزد

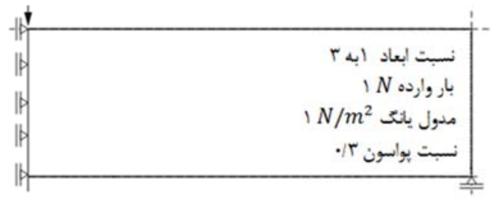
Email: Mahnaz.akbarzaghi@gmail.com

(۲) دانشیار، گروه عمران، دانشکده فنی و مهندسی و دانشگاه یزد

مقدمه

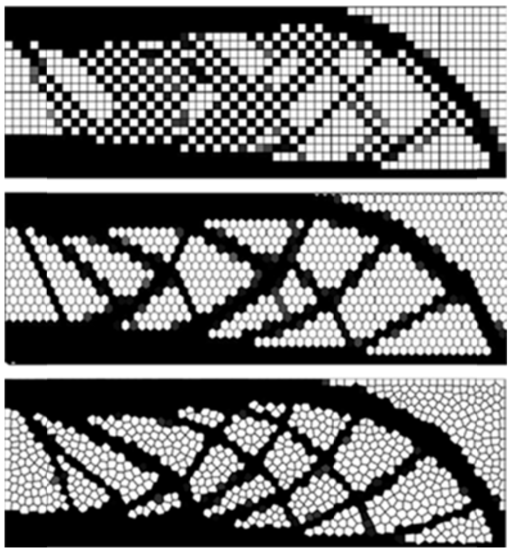
درگذشته از المان‌های چهارضلعی و مثلثی درزمینه‌ی بهینه‌سازی توپولوژی استفاده می‌کردند، بااین‌حال این المان‌ها به طور متداول، دچار ناپایداری عددی ازجمله پدیده شطرنجی در مسائل بهینه‌سازی توپولوژی می‌شدند، که می‌توان از فیلترینگ برای از بین بردن ناپایداری عددی از جمله پدیده شطرنجی استفاده کرد. استفاده از فیلترینگ می‌تواند مشکل بهینه‌سازی را افزایش دهد [1,2]. یک‌راه حل عملی برای از بین بردن چنین مشکلاتی، استفاده از المان محدود شش‌ضلعی (لانه‌زنبوری) است. استفاده از المان‌های شش‌ضلعی بدون اعمال هرگونه محدودیت، مشکل پدیده شطرنجی را از بین می‌برد و علت آن این است که المان‌های شش‌ضلعی یا به یکدیگر اتصال ندارند یا توسط دو گره و یک ضلع با یکدیگر اتصال دارند [3]. یکی از مشکلات استفاده از شبکه‌های یکنواخت مانند المان‌های لانه‌زنبوری، مشکل گسسته‌سازی دامنه طراحی و دقت در نشان‌دادن بارگذاری و شرایط مرزی است. المان‌های چندضلعی غیریکنواخت با فراهم کردن گسسته‌سازی انعطاف‌پذیرتر در دامنه‌های پیچیده، می‌تواند در گسسته‌سازی بهینه‌سازی توپولوژی مفیدتر باشد [4].

در ادامه، مثال تیر MBB با دامنه و شرایط بارگذاری مطابق شکل (۱) بهینه‌سازی توپولوژی را بدون محدودیت اضافی با استفاده از روش‌های مختلف مش‌بندی بررسی شده است.

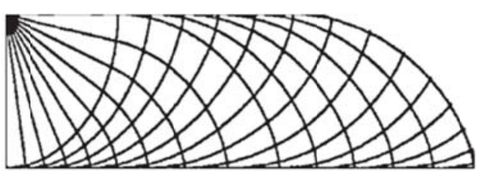


شکل ۱ دامنه و شرایط باگذاری تیر MBB با مشخصات مصالح استفاده شده در آن

در شکل (۲) نتایج بهینه‌سازی توپولوژی ارائه شده که ردیف بالا مش‌بندی با المان چهارضلعی و ردیف وسط مش‌بندی با المان شش‌ضلعی (لانه‌زنبوری) استفاده شده‌است. همانطور که در شکل مشاهده می‌گردد مش‌بندی با المان‌های چهارضلعی، الگوهای شطرنجی ایجاد می‌شود . الگوهای شطرنجی دارای سختی کاذب هستند که در مقابل، راه‌حل مش‌بندی‌های با المان‌های چندضلعی (لانه‌زنبوری و غیریکنواخت) از چنین ناهنجاری‌های آزاد هستند و سختی کاذب ندارند [3]. باید به این نکته اشاره کرد که به‌منظور مدل کردن یک دامنه با مرز مستقیم استفاده از المان شش‌ضلعی، باید یک‌لایه المان مثلثی و چهارضلعی در امتداد مرز قرار دهیم که این در مش‌بندی یکنواخت مناسب نیست و از معایب مش‌بندی شش‌ضلعی می‌باشد [5].



شکل ۲ راه‌حل توپولوژی برای مسئله تیر MBB بدون هرگونه محدودیت اضافی. بالا: مش بندی مربعی. وسط: مش بندی لانه‌زنبوری. پایین: مش بندی چندضلعی غیریکنواخت



شکل ۳ طرح نهایی تیر MBB با توجه به طرح میشل [6]

همان‌طور که مشاهده شد نتایج بهینه‌سازی

توپولوژی مش‌بندی با المان‌های چندضلعی غیریکنواخت ازالمان‌های مربعی و لانه زنبوری بهتر عمل می‌کند و به طرح نهایی ارائه‌شده توسط میشل مطابق شکل (۳) نزدیک تر است. بنابراین در ادامه این مقاله از مش‌بندی غیریکنواخت استفاده شده و مزایای آن در مسائل بهینه‌سازی توپولوژی چندهدفه با حل دو مثال با دامنه‌ی محدب و غیرمحدب بررسی می‌گردد.

ساخت المان‌های چندضلعی غیریکنواخت

المان‌های چندضلعی غیریکنواخت با فراهم کردن گسسته‌سازی انعطاف‌پذیرتر در دامنه‌های پیچیده، می‌تواند در گسسته‌سازی بهینه‌سازی توپولوژی مفیدتر باشد. در ساخت این المان‌ها، از نمودار ورونوی به عنوان وسیله برای تولید المان‌های چندضلعی نامنظم استفاده می‌شود [7]. از ویژگی‌های جالب این روش این است که سطوح تصادفی و با همسانی هندسی از قرار دادن نقاط دلخواه و کاملاً تصادفی به دست می‌آید و در ادامه از الگوریتم لوید برای یکنواخت کردن المان‌ها استفاده می‌شود [8].

مش‌بندی اولیه و دیاگرام ورونوی. برای تولید مش‌بندی‌ها غیریکنواخت، از نمودار ورونوی برای گسسته‌سازی دامنه استفاده می‌شود. گسسته‌سازی دامنه با استفاده از روش المان‌های غیریکنواخت دارای تقریب مناسبی از مرز است. هم چنین از روش لوید برای ایجاد یک توزیع دانه‌های یکنواخت و درنتیجه ساخت مش-بندی با کیفیت بالا استفاده می‌شود. مش‌بندی چندضلعی با استفاده از مجموعه نقاط تصادفی در دامنه Ω و همچنین نقاط کمکی برای تقریب شرایط مرزی $\partial\Omega$ ایجاد می‌شود. به‌طورکلی از روش زیر برای مش-بندی اولیه استفاده می‌شود:

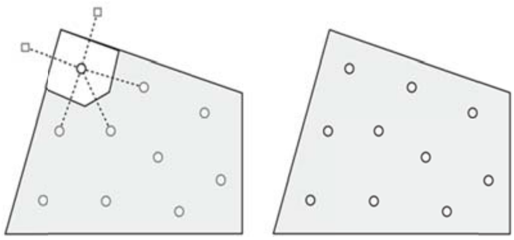
۱. در داخل دامنه Ω مجموعه نقاط تصادفی به تعداد موردنظر تولید می‌شوند. به این مجموعه نقاط P_{int} می‌گویند.

۲. برای ایجاد تقریب مناسب از دامنه، نقاط داخلی باید نسبت به لبه دامنه منعکس شوند. مجموعه نقاط به‌دست‌آمده را نقاط کمکی P_{aux} می‌نامند.

۳. دیاگرام ورونوی با نقاط $P = P_{aux} \cup P_{int}$ ساخته می‌شود.

٤. گسسته سازی چندضلعی از دامنه توسط المان‌های در ارتباط با نقاط ایجاد می‌شود.

از این روش در شکل (٤) برای تولید یک المان پنج ضلعی، استفاده‌شده است [4,9].



شکل ٤ تولید المان غیریکنواخت. راست: قرارگیری نقاط تصادفی. چپ: ساخت دیاگرام ورونوی با مجموعه نقاط تصادفی و کمکی (مربع).

برای ساخت چنین مش‌بندی‌هایی بعد از پراکنده شدن نقاط تصادفی، برای تقریب دامنه، نقاط نسبت به مرز منعکس می‌شوند. اما انعکاس بسیاری از نقاط در درون دامنه، هیچ تأثیری در تقریب دامنه ندارد. بنابراین شرط زیر برای انعکاس نقاطی که در نزدیکی مرز لحاظ می‌شود و این هزینه و زمان محاسبات را کاهش می‌دهد:

$$|d_{\Omega i}(y)| < \alpha(n,\Omega) \qquad (۱)$$

که در آن $\alpha(n,\Omega)$ یک مقدار فاصله متناسب با عرض المان است که طبق رابطه زیر محاسبه می‌شود:

$$\alpha(n,\Omega) := c\left(\frac{|\Omega|}{n}\right)^{1/2} \qquad (۲)$$

برای پیدا کردن بازتابی از x نسبت به نزدیک‌ترین نقطه مرزی استفاده می‌شود. بازتاب‌ها با علامت $R_\Omega(x)$ مشخص می‌شود و طبق رابطه زیر به‌دست

می‌آید:

$$R_\Omega(x) = x - 2d_\Omega(x)\nabla d_\Omega(x) \quad (۳)$$

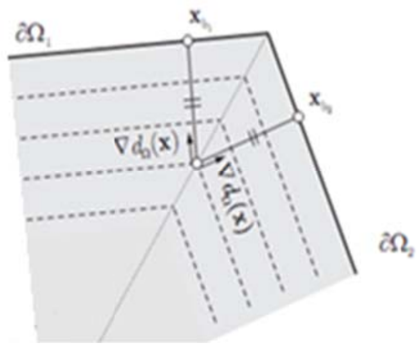
که در آن ∇d_Ω جهت نزدیک‌ترین نقطه مرزی را می‌دهد و تابع فاصله $d_\Omega(x)$ به‌صورت زیر تعریف گردد. اگر Ω زیرمجموعه‌ای از $\mathbb{R}^2$ با شرایط مرزی مشخص باشد، تابع فاصله مربوط به Ω با $d_\Omega: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ با رابطهٔ زیر تعریف می‌شود:

$$d_\Omega(x) = s_\Omega \min_{y\in\partial\Omega} \|x - y\| \quad (٤)$$

در آن $\partial\Omega$ نشان‌دهندهٔ مرز Ω است، بنابراین $\|x - y\|$ فاصله اقلیدسی بین دونقطه‌ی x و y روی مرز دامنه است و تابع s_Ω در رابطه زیر تعریف‌شده است:

$$s_\Omega(x) = 1 - 2\chi_\Omega(x)\begin{cases}-1 & x\epsilon\Omega \\ 1 & x\epsilon\Omega'\end{cases} \quad (٥)$$

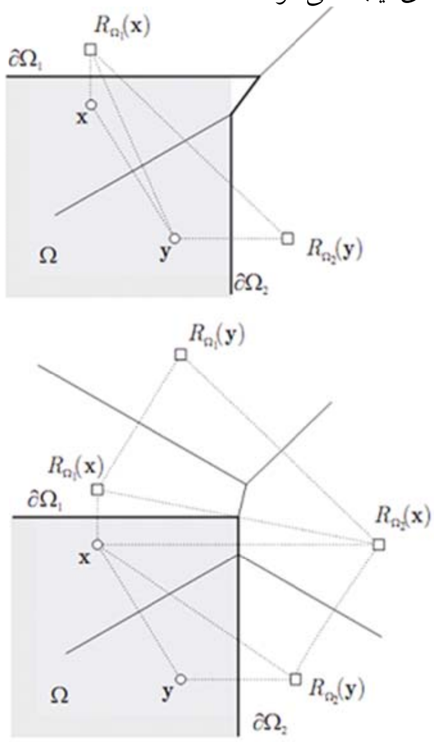
در بازتاب نقاط گاهی همانند شکل (٥) نقطه‌ای مانند x دارای فاصله‌ی مساوی با دو مرز می‌باشد، آنگاه $\nabla d_\Omega(x)$ به‌صورت واحد وجود ندارد و در این حالت x باید نسبت به هر دو مرز منعکس شود.



شکل ٥ نقطه x در بیش از یک نقطه، فاصله مساوی از $\partial\Omega$ است

همچنین در بازتاب نقاط نسبت به مرز باید توجه کرد که انعکاس یک نقطه نسبت به نزدیک‌ترین مرز مطابق شکل (٦) ممکن است برای یافتن گوشهٔ مناسب کافی نباشد و این مشکل توسط انعکاس نقطه نسبت به هر دو بخش مرز مجاور، حل‌وفصل می‌گردد.

بعد از انعکاس نقاط و با استفاده از نقاط تصادفی، تقسیم‌بندی ورونوی صورت گرفته و با استفاده از آن‌ها مش‌بندی ایجاد می‌شود.



شکل ٦ برای ایجاد یک‌گوشه دقیق، نیاز به بازتاب نقاط نسبت به هر دو بخش مرز در گوشه است.

الگوریتم لوید. نظم نمودار ورونوی به‌طور کامل توسط مجموعه نقاط تولیدشده تعیین می‌شود. یک مجموعه مولد تصادفی یا شبه تصادفی ممکن است به یک گسسته‌سازی که برای استفاده و تحلیل المان محدود مناسب نیست، منجر شود. بنابراین باید یک مجموعه‌ای از تقسیم‌بندی ورونوی که یک سطح بالاتری از نظم را دارد، را بدست آورد. یکی از الگوریتم‌های پرطرفدار برای ساخت مش‌بندی چندضلعی، طرح تکراری الگوریتم لوید است [8]. الگوریتم لوید با کاهش انرژی به‌صورت محلی همگرا می‌شود. مراحل انجام الگوریتم لوید به شرح زیر قابل بیان است:

١. ساختن نمودار ورونوی در ارتباط با نقاط
٢. محاسبه مرکز جرم هر سلول

۳. جایگزین کردن نقاط اصلی با مجموعه نقاط ثقلی و رفتن به گام بعد مگر اینکه به همگرایی رسیده باشد.

در الگوریتم لوید، مرکز ثقل هر قسمت به‌صورت زیر محاسبه می‌شود و جایگزین نقاط اولیه می‌گردد:

$$y = y_c \rightarrow y_c := \frac{\int_{V_y \cap \Omega} x\mu(x)dx}{\int_{V_y \cap \Omega} \mu(x)dx} \qquad (٦)$$

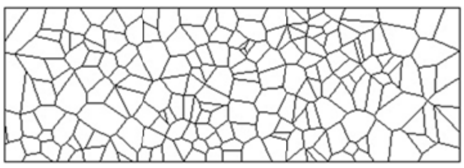
در آن $\mu(x)$ تابع چگالی تعریف‌شده روی Ω است. ازاین‌رو، در تقسیم‌بندی‌های ایجادشده، هر نقطه‌ی y تولیدشده هم‌زمان با نقطه ثقلی y_c نیز مرتبط است. بعد از جایگزین شدن نقاط y_c به‌جای نقاط قبلی، انحراف نقاط تولیدشده در هر ناحیه ورونوی، توسط تابع انرژی طبق رابطه زیر اندازه‌گیری می‌شود:

$$\varepsilon(P,\Omega) = \sum_{y \epsilon P} \int_{V_y(P) \cap \Omega} \mu(x) \|x-y\|^2 dx \qquad (٧)$$

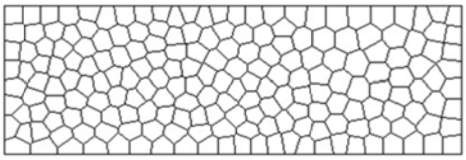
دیده می‌شود که تابع انرژی در تکرار متوالی از الگوریتم لوید کاهش می‌یابد که در رابطه زیر نشان داده‌شده است:

$$\varepsilon(P_{i+1},\Delta) \leq \varepsilon(P_i,\Delta) \qquad (٨)$$

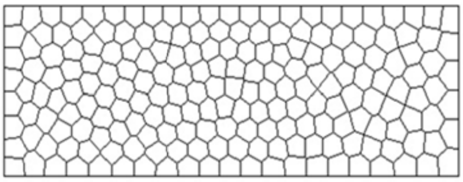
به این معنی که الگوریتم لوید می‌تواند به عنوان یک روش نزولی برای تابع انرژی مشاهده شود [10]. مشاهده می‌شود که مش‌بندی با افزایش تکرار الگوریتم لوید بهبود می‌یابد و المان های یکنواخت‌تری ایجاد می‌گردد و این ویژگی در شکل (۷) تا (۹) به‌خوبی نشان داده شده است. همچنین مقدار کاهش تابع انرژی ناشی از انحراف نقاط تولیدشده در تکرارهای مختلف در شکل (۱۰) نشان داده‌شده است و مشاهده می‌شود که مقدار کاهش تابع انرژی در تکرارهای اول بیشتر از تکرارهای بعدی آن است [۱۱].



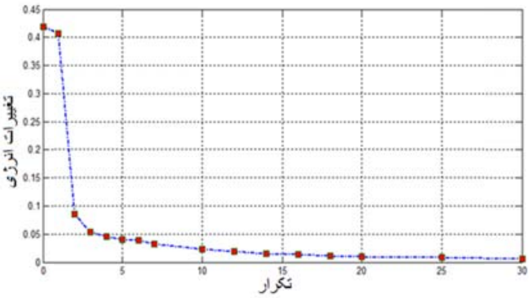
شکل ۷ تکرار اول الگوریتم لوید ε =0.4192



شکل ۸ تکرار دهم الگوریتم لوید ε =0.002301



شکل ۹ تکرار آخر الگوریتم لوید ε =0.0004850



شکل ۱۰ نمودار کاهش انرژی با توجه به تکرار الگوریتم لوید

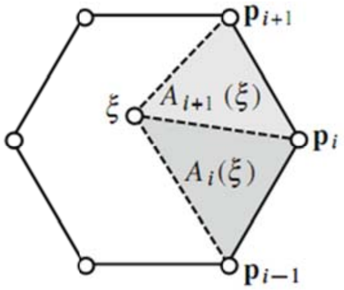
بررسی توابع شکل و تقریب سازی به‌وسیلهٔ المان‌های ایزوپارامتریک

همان‌طور که از نتایج الگوریتم لوید مشخص است المان‌های ایجادشده، به‌صورت چندضلعی‌های غیریکنواخت هستند و تعداد اضلاع و شکل آن‌ها باهم متفاوت است. در این مقاله، برای تقریب‌سازی توابع شکل از المان‌های ایزوپارامتریک استفاده می‌شود. منظور از المان ایزوپارامتریک این است که همه محاسبات بر مبنای توابع شکل یکسانی انجام می‌گیرد. برای این منظور توابع شکل بر روی یک المان استاندارد با مختصات $\xi = (\xi_1, \xi_2) \in \Omega_0$ تعریف می‌شود که این نوع مختصات نوعی مختصات گرانیگاهی است که مرکز دستگاه، مرکز جرم آن المان است. فرمول المان محدود N ضلعی که شامل درون‌یابی توابع شکل و تقریب-

سازی با المان ایزوپارامتریک بررسی می‌گردد.

برای n ضلعی منتظم رأس‌های n ضلعی به‌صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\left(\cos\frac{2\pi}{n},\sin\frac{2\pi}{n}\right),\left(\cos\frac{4\pi}{n},\sin\frac{4\pi}{n}\right),\ldots \qquad (۹)$$



شکل ۱۱ تصویری از یک المان و مثلث‌های ساخته‌شده با آن

درون‌یابی تابع شکل مربوط به گره i ام به‌صورت زیر تعریف می‌شود (شکل۱۱):

$$N_i(\zeta)=\frac{\alpha_i(\zeta)}{\sum_{j=1}^{n}\alpha_j(\zeta)} \qquad (۱۰)$$

که در آن $\alpha_i(\zeta)$ به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\alpha_i(\zeta)=\frac{1}{A(P_{i-1},P_I,\zeta)A(P_I,P_{i+1},\zeta)} \qquad (۱۱)$$

که A مساحت مثلث با موقعیت رئوس داخل پرانتز می‌باشد.

بدیهی است که توابع شکل در امتداد لبه‌ی چندضلعی خطی هستند و خاصیت دلتای کرنوکر را برآورده می‌کند و همچنین توابع شکل غیر منفی هستند و جمع آن‌ها برابر با یک می‌باشد.

با توجه به این خواص، توابع شکل می‌تواند برای ساخت نقشه‌های ایزوپارامتریک برای هر n ضلعی محدب استفاده شود برای توضیح کامل‌تر این مبحث، خوانندگان به مرجع [12] ارجاع می‌گردند.

استفاده از مش‌بندی چندضلعی در بهینه‌سازی توپولوژی چندهدفه

هدف اصلی در بهینه‌سازی توپولوژی پیدا کردن چیدمان بهینه یک سازه در ناحیه معین برای انتقال بارهای وارده به نواحی مرزی است. تنها کمیت‌های معین در مسئله‌ی بهینه‌سازی توپولوژی، بارهای وارده، شرایط تکیه‌گاهی، حجم سازه و ممکن است محدودیت‌هایی نظیر موقعیت و ابعاد نواحی توخالی و توپر نیز مشخص باشد، اما اندازه، شکل و ارتباط بین اجزای تشکیل‌دهنده‌ی سازه مجهول است. بهینه‌سازی توپولوژی درواقع انتخاب هم‌زمان توپولوژی (نحوه‌ی ارتباط نواحی تشکیل‌دهنده سازه)، شکل و اندازه اعضاء تشکیل‌دهنده سازه می‌باشد. بهینه‌سازی توپولوژی به دلیل اینکه در مقایسه با دیگر روش‌های بهینه‌سازی حجم بیشتری از مصالح را کاهش می‌دهد از درجه اهمیت بالایی برخوردار است [1].

همان‌طور که قبلاً بیان شد در طراحی توپولوژی به دنبال پیدا کردن مکان بهینه برای مواد ایزوتروپیک داده‌شده هستیم، یعنی باید نقاطی را که از مواد تشکیل‌شده یا فضای خالی هستند مشخص شود همچنین برای سهولت ساخت و اجرا، نتایج طراحی باید به نحوی باشد که تمام فضای طراحی تقریباً از نواحی توپر یا توخالی تشکیل‌شده باشد. متداول‌ترین شیوه برای حل این‌گونه مسائل (اصلاح مسئله)، جایگزین کردن مقادیر پیوسته به‌جای مقادیر گسسته و سپس استفاده از نوعی جریمه برای میل دادن جواب به مقادیر گسسته (۰–۱) است [13]. یکی از روش‌هایی که کارایی مؤثری برای این‌گونه مسائل دارد مدل سختی نسبی جریمه‌شده یا مدل SIMP است که به‌صورت زیر بیان می‌شود [13]:

$$E_i(x)=[\varepsilon+(1-\varepsilon)\rho(x)^p]\,E_i^0\ \ ,p>1 \qquad (۱۲)$$

در اینجا $\rho(x)$ چگالی و تابع متغیّر طراحی است. دلیل اینکه از ρ استفاده‌شده، این است که چگالی خصوصیات مصالح را بین ۰ و E_i^0 درون‌یابی می‌کند و E_i^0 ماتریس سختی اولیه در المان i ام است و P همان جریمه برای میل دادن جواب به مقادیر گسسته می‌باشد. حال برای بررسی پارامتر جریمه و نحوهٔ انتخاب آن یک مسئلهٔ تیر MBB با دامنه محدب (شکل ۱۲) مورد بررسی قرارگرفته است. تیر MBB با ابعاد ۱×۳ که در

اکثر مقالات بهینه‌سازی توپولوژی با بار وارده ۱ نیوتون و مدول یانگ ۱ نیوتون بر مترمربع و نسبت پواسون ۰/۳ در نظر گرفته می‌شود [1,3,14,15] و برای اینکه بتوان با سایر مقالات و روش‌ها مقایسه نمود، در این مقاله همین مثال مورد بررسی قرارگرفته است. برای مش‌بندی از ۳۰۰۰ المان تنش مسطح چندضلعی غیریکنواخت استفاده شد. نتایج حاصل از دو روش تابع جریمه پیوسته و گسسته در جدول (۱) آورده شده است.

جدول ۱ مقایسه پارامتر جریمه گسسته و پیوسته در دامنه محدب تیر MBB

تابع هدف	جریمه
۱۸۷/۱۷۵	۱/۵
۱۸۷/۱۳٦	[۱-۱/۵]
۱۹٤/۲۹٤	۲
۱۹۳/۸۰۸	[۱-۲]
۱۹۸/۹۹۳	۲/۵
۱۹۸/٦۱۷	[۱-۲/۵]
۲۰۱/۷٦۱	۳
۲۰۰/۷٦۹	[۱-۳]
۲۰٦/۹۳۲	۳/۵
۲۰٦/۸۱٤	[۱-۳/۵]
۲۱۲/۹۹۸	٤
۲۱۱/۸۹٤	[۱-٤]

همان‌طور که از جدول (۱) مشاهده می‌شود، نتایج به‌دست‌آمده از پارامتر جریمه پیوسته نسبت به پارامتر جریمه گسسته اعداد بهتری ارائه می‌دهد و در نتیجه ادامه این مقاله از پارامتر جریمه پیوسته استفاده‌شده است.

در مسائل بهینه‌سازی چندهدفه، چند هدف به‌طور هم‌زمان بهینه می‌شوند و توابع هدف در مسائل بهینه‌سازی چندهدفه با مش‌بندی مربعی معمولاً کمینه کردن نرمی و کمینه کردن حجم [16]، بیشینه کردن مقدار ویژه، کمینه کردن حداکثر تغییر مکان زیر بارگذاری‌ها [17]، حداکثر کردن انعطاف‌پذیری به حداقل رساندن نرمی [18] و غیره می‌باشند. برخلاف مسائل بهینه‌سازی تک هدفه، مسائل بهینه‌سازی چندهدفه، حل واحد کلی ندارند و بلکه در این‌گونه مسائل، جواب مسئله به‌صورت دسته جواب بهینه پارتو ارائه می‌شود. در مقاله، دو تابع هدف نرمی و حجم به‌صورت زیر در نظر گرفته می‌شود:

$$f_1 = J(\rho, u) = f^T u \tag{۱۳}$$

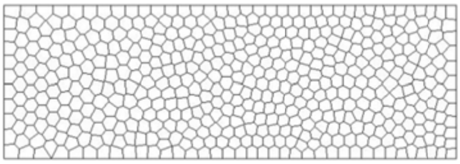
$$f_2 = V(\rho) = \int \rho dv \tag{۱٤}$$

که در آن f_1 تابع هدف نرمی است که به چگالی (متغییر طراحی) و جابجایی وابسته است و f_2 تابع هدف حجم می‌باشد که فقط به چگالی وابسته است. برای ردیابی بهینه‌سازی توپولوژی دو هدفه با توابع مشخص‌شده، از نرم‌افزار متلب استفاده‌شده و نزدیک به ٤٥٠ خط برنامهٔ مربوطه نوشته‌شده است که ۲۱٦ خط مربوط به مش‌بندی چندضلعی غیریکنواخت و ۱۹۰ خط مربوط به تعریف توابع هدف و ردیابی نمودار پارتو در توپولوژی چندهدفه و حدود۵۰ خط مربوط به تعریف دامنه‌های مختلف طراحی می‌باشد. بعد از نوشتن کدهای مربوطه، با دادن هر دامنه طراحی (محدب و غیر محدب) با هر شرایط مرزی می‌توان نمودار پارتو و نتایج آن را به دست آورد.

به دامنه Ω از فضای $\mathbb{R}^n$ یک دامنه محدب گفته می‌شود هرگاه برای هر دو نقطه از دامنه x و y از Ω و هر $0 \le t \le 1$ رابطهٔ زیر برقرار باشد.

$$(1-t)x + ty \in \Omega \tag{۱۵}$$

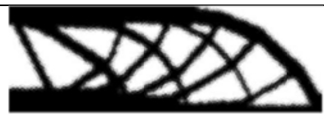
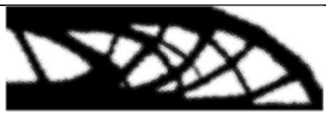
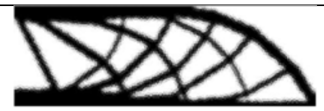
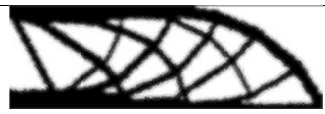
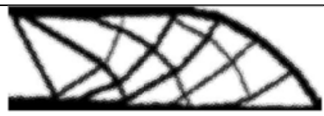
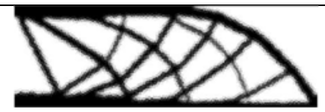
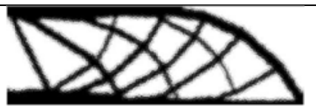
در ادامه مثال تیر MBB، تیر را بر اساس توابع نرمی و حجم موردبررسی قرار می‌گیرد. شرایط بارگذاری و تکیه‌گاهی سازهٔ موردبررسی در شکل (۱۲) مشخص‌شده است و نتایج حاصل از بهینه‌سازی توپولوژی دو هدفه در جدول (۲) ارائه گردیده است.

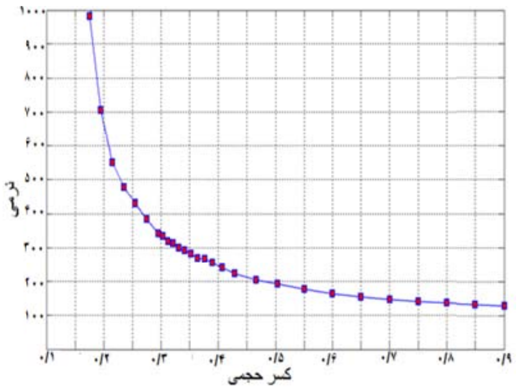


شکل ۱۲ مسئله تیر MBB ، هندسه و شرایط مرزی با دامنه محدب

همچنین نمودار پارتو مربوط بـه تیـر MBB بـا شـرایط بارگذاری توضیح داده‌شده در شکل (۱۳) ردیـابی مـی-گردد. همان‌طور که مشاهده می‌شود در مسائل با داشتن دو تابع هدف، بـا یـک نمـودار پـارتو و مجموعـه‌ای از توپولوژی‌هـای مختلـف روبـرو هسـتیم. در کسـرهـای حجمی بزرگ، به دلیل مبهم بودن نحوه‌ی چیدمان مواد، نمی‌تـوان از روی آن‌هـا، توپولـوژی نهـایی مناسـب را تشخیص داد و همچنین با انتخاب کسرحجمی کوچـک برخی از اعضا، از توپولـوژی سـازه حـذف مـی‌شـوند. همان‌طـور کـه از روی نمـودار دیـده مـی‌شـود کـه در محدوده‌ی میانی نمودار نیز تراکم نقـاط نسـبت بـه هـم بیشتر می‌شود و ازاین‌رو جواب مناسب بهینه توپولوژی در نمودار پارتو در محدوده وسط نمودار قرار می‌گیرد.

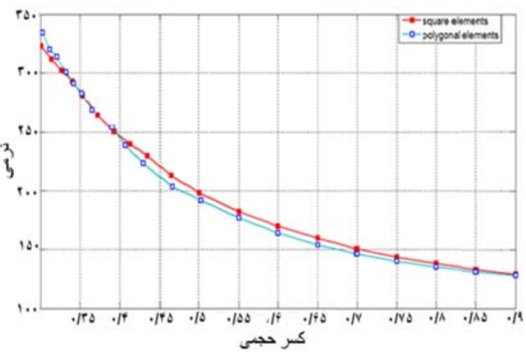
جدول ۲ برخی از نتایج بهینه‌سازی توپولوژی دو هدفه در تیر MBB با ۳۰۰۰ المان

 کسر حجمی: ۰/۸ نرمی: ۱۳۵/۱	 کسر حجمی: ۰/۸۵ نرمی: ۱۳۱/۲	 کسر حجمی: ۰/۹ نرمی: ۱۲۸/٤
 کسر حجمی: ۰/٦۵ نرمی: ۱۵۳/۹	 کسر حجمی: ۰/۷ نرمی: ۱٤۵/۹	 کسر حجمی: ۰/۷۵ نرمی: ۱۳۹/۷
 کسر حجمی: ۰/۵۰۳۲ نرمی: ۱۹۱/۷	 کسر حجمی: ۰/۵۵ نرمی: ۱۷٦/٦	 کسر حجمی: ۰/٦ نرمی: ۱٦۳/۷
 کسر حجمی: ۰/۳۸۹۷ نرمی: ۲۵٤/۵	 کسر حجمی: ۰/٤۰٦۹ نرمی: ۲۳۹/۰	 کسر حجمی: ۰/٤٦٦۱ نرمی: ۲۰۳/٤
 کسر حجمی: ۰/۳۰۲۷ نرمی: ۳۳٤/۲	 کسر حجمی: ۰/۳۳۱۸ نرمی: ۳۰۰/۵	 کسر حجمی: ۰/۳۵۲۳ نرمی: ۲۸۲/۷



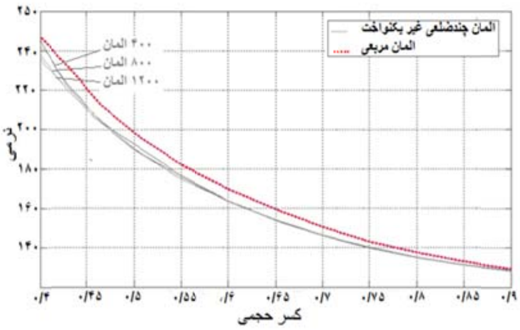
شکل ۱۳ ردیابی بهینه پارتو تیر MBB با المان‌های چندضلعی غیریکنواخت

برای بررسی اعتبارسنجی، نمودار پارتو به‌دست‌آمده با نمودار پارتو توپولوژی به‌دست‌آمده از روش سوروش [1] با مش‌بندی چهارضلعی (مربعی) و با توابع هدف مشابه مقایسه می‌گردد. هر دو مثال برای تیر MBB با ۱۲۰۰ المان برای مش بندی چندضلعی و تعداد ۲۰×۶۰ المان برای مش بندی مربعی اجراشده است و توابع هدف نرمی و حجم به یک‌گونه تعریف‌شده‌اند. برای مقایسه نمودارها هر دو نمودار پارتو برحسب نرمی و کسر حجمی در شکل (۱٤) رسم شده است.



شکل ۱٤ مقایسه بهینه پارتو تیر MBB با المان‌های چندضلعی غیریکنواخت و المان‌های مربعی در مقاله سوروش [1].

همان‌طور که از شکل (۱٤) مشخص است، با مقایسه دو منحنی پارتو دیده‌می‌شود که نتایج بهینه‌سازی توپولوژی با مش‌بندی چندضلعی از نتایج به‌دست‌آمده از روش مش‌بندی مربعی، بهتر می‌باشد و نمودار پارتو به‌دست‌آمده از روش مش‌بندی چندضلعی در پایین نمودار پارتو با مش‌بندی مربعی قرار می‌گیرد. به‌عنوان‌مثال در یک حجم مشخص، استفاده از مش‌بندی چندضلعی غیریکنواخت، مقدار نرمی کمتر و بهتری را در اختیار ما قرار می‌دهد. حال با توجه به مثال فوق که با مقایسه بین نتایج حاصل از مش‌بندی مربعی و چندضلعی غیریکنواخت تیر MBB درمی‌یابیم که نتایج ردیابی منحنی پارتو در حالت مش‌بندی با المان‌های چندضلعی به جواب‌های قابل‌قبول‌تری می‌دهد.



شکل ۱۵ مقایسه بهینه پارتو تیر MBB با المان‌های مربعی و المان‌های چندضلعی غیریکنواخت

در ادامه تأثیر تعداد المان‌ها بر روی نتایج منحنی پارتو بررسی می‌گردد، به این منظور مسئله تیر MBB را با تعداد المان‌های غیریکنواخت ۸۰۰،٤۰۰ و ۱۲۰۰ را اجرا کرده و نمودار پارتو را برای هر یک از آن‌ها به دست آورده و با نتیجه منحنی پارتو با المان مربعی با تعداد ۲۰×۶۰ مقایسه می‌شود.

در هربار اجرای برنامه‌ی متلب، زمان را با دقت دقیقه با رایانه شخصی با مشخصات (CPU:Core2 GHZ T6670 2.2G /RAM:2G) اندازه‌گیری نموده و تأثیر استفاده از المان‌های چندضلعی غیریکنواخت و همچنین افزایش تعداد المان بر روی زمان اجرای برنامه موردبررسی قرار داده شد.

جدول ۳ مقایسه زمان اجرای برنامه متلب برای المان‌های چندضلعی غیریکنواخت و مربعی

تعداد المان	المان غیریکنواخت	المان مربعی	درصد کاهش زمان
٤۰۰	۲۳۱ دقیقه	۷۱۰ دقیقه	٪٦٥/٤٦
۸۰۰	۳۹۵ دقیقه	۱۲۳۱ دقیقه	٪٦٧/۹۱
۱۲۰۰	٤۹۸ دقیقه	۱٤۹۷ دقیقه	٪٦٦/۷۳

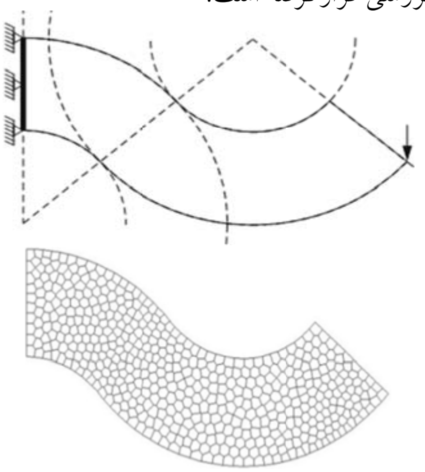
همان‌طور که از جدول (۳) مشهود است، با افزایش تعداد المان‌ها و ریز شدن مش‌بندی‌ها، زمان محاسبات افزایش می‌یابد. همین‌طور که در شکل (۱۵) دیده می‌شود ریزترشدن مش‌بندی‌ها، نتایج حاصل از منحنی پارتو را بهبود داده و دقت محاسبات بیشتر می‌شود. زمان اجرای برنامه در مش‌بندی چندضلعی غیریکنواخت از ثلث زمان اجرا در مش‌بندی مربعی کمتر است و درنتیجه می‌توان در زمان کمتر به نتایج قابل‌قبول‌تری با المان‌های غیریکنواخت دست‌یافت.

در طراحی‌های گسترده و سازه‌ها، افزایش تعداد المان در بعضی موارد مقرون‌به‌صرفه نمی‌باشد و باید جنبه اقتصادی و زمان اجرا را در نظر گرفت. افزایش تعداد المان در چندضلعی غیریکنواخت، در نمودار پارتو تغییرات زیادی ایجاد نمی‌کند. درنتیجه با مش‌بندی چندضلعی غیریکنواخت می‌توان با تعداد المان کمتر، جواب‌های قابل قبولی را به دست آورد.

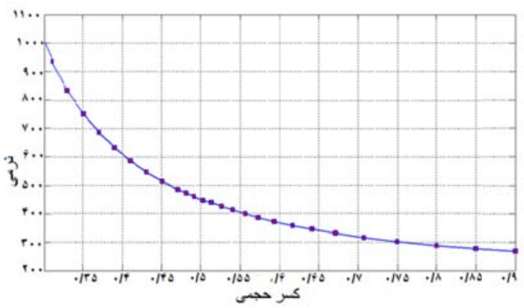
طبق نتایج ارائه‌شده مشاهده می‌شود که زمان محاسبات، بیش از ٦٥ درصد کاهش می‌یابد. علت کاهش زمان محاسبات را می‌توان کم شدن زمان محاسبات مرتبط با فیلترینگ دانست. درنتیجه چون در اکثر طراحی‌ها تابع هدف کمینه کردن وزن یا حجم بجای کمینه کردن هزینه استفاده می‌شود با استفاده از بهینه‌سازی توپولوژی چندهدفه با المان چندضلعی غیریکنواخت، می‌توان سازه‌هایی سبک وزن، کم قیمت با بازدهی بالا طراحی نمود. کاهش زیاد زمان محاسبات از یک سو و نزدیک بودن طرح نهایی تیر MBB ارائه‌شده توسط المان‌های غیریکنواخت، به طرح بهینه ارائه‌شده توسط میشل [6] از سو دیگر علت‌های اصلی اقتصادی بودن روش چندضلعی غیریکنواخت می‌باشد.

در ادامه، مسئله معروف تیر Serpentine با دامنه طراحی و شرایط تکیه‌گاهی مانند شکل (١٦) را با تعداد ۳۰۰۰ المان به‌عنوان نماینده‌ای از مسائل توپولوژی دامنه‌ی غیرمحدب مورد بررسی قرار می‌گیرد. مشخصات این مثال، همانند مشخصات ارائه‌شده در سایر مقالات برای این مسئله، بار وارده ۱ نیوتون و مدول یانگ ۱ نیوتون‌برمترمربع و نسبت پواسون ۰/۳ در نظر گرفته‌شده است.

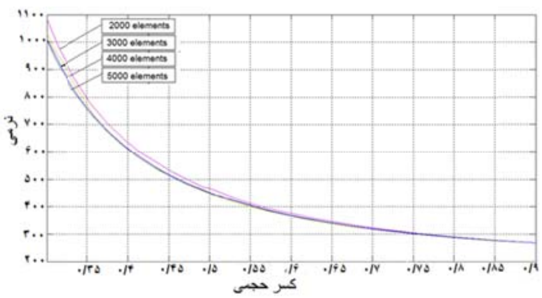
جدول (٤) نتایج بهینه‌سازی ارائه‌شده در برنامهٔ متلب را نشان می‌دهد و همچنین نمودار پارتو تیر Serpentine با المان‌های چندضلعی غیریکنواخت در شکل (١٧) نشان داده‌شده است و همچنین تأثیر افزایش تعداد المان بر روی دامنه‌ی غیر محدب در شکل (١٨) موردبررسی قرارگرفته است.



شکل ١٦ مسئله تیر Serpentine، هندسه و شرایط مرزی با دامنه غیر محدب

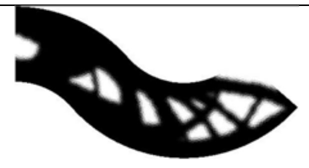
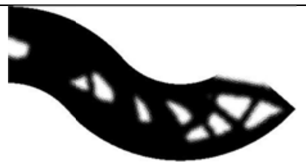
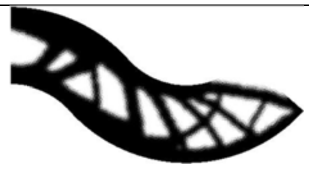
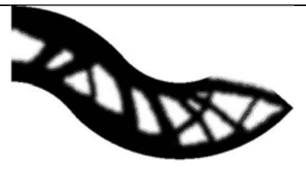
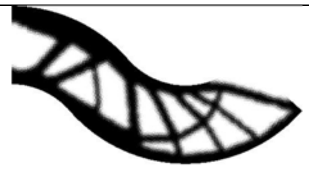
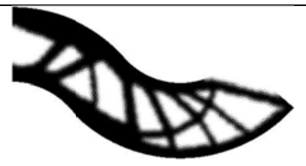
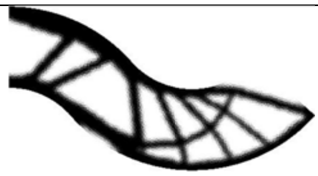
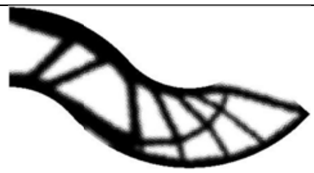
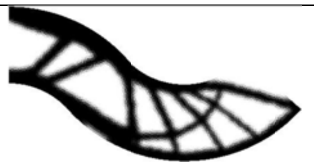
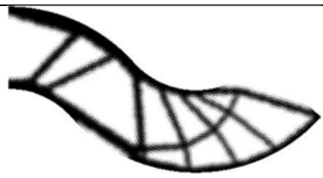
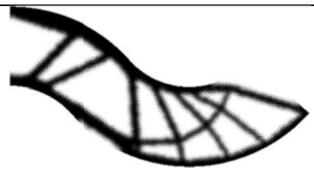
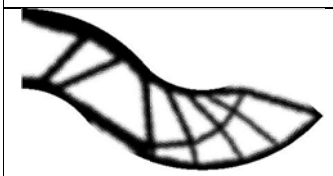
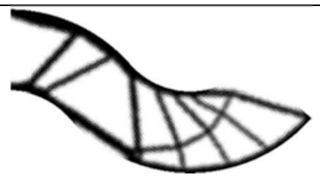
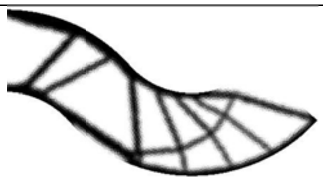
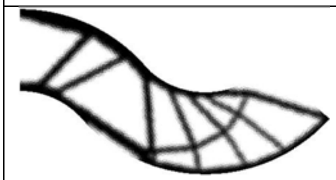


شکل ١٧ ردیابی بهینه پارتو تیر Serpentine با ۳۰۰۰ المان چندضلعی غیریکنواخت



شکل ١٨ بررسی روند تغییر در منحنی پارتو تیر Serpentine با افزایش تعداد المان

جدول ۴ برخی از نتایج بهینه‌سازی توپولوژی دو هدفه تیر Serpentine با ۳۰۰۰ المان چندضلعی غیریکنواخت

 کسر حجمی: ۰/۸ نرمی: ۲۸۸/۸	 کسر حجمی: ۰/۸۵ نرمی: ۲۷۷/۸	 کسر حجمی: ۰/۹ نرمی: ۲۶۹/۰
 کسر حجمی: ۰/۶۷۱۰ نرمی: ۳۳۰/۲	 کسر حجمی: ۰/۷۰۷۵ نرمی: ۳۱۷/۴	 کسر حجمی: ۰/۷۵ نرمی: ۳۰۲/۸
 کسر حجمی: ۰/۵۴۰۹ نرمی: ۴۱۳/۸	 کسر حجمی: ۰/۵۹۳۳ نرمی: ۳۷۴/۰	 کسر حجمی: ۰/۶۴۱۴ نرمی: ۳۴۵/۷
 کسر حجمی: ۰/۴۵۰۸ نرمی: ۵۳۴/۵	 کسر حجمی: ۰/۴۹۱۸ نرمی: ۴۶۲/۰	 کسر حجمی: ۰/۵۰۳۰ نرمی: ۴۴۸/۹
 کسر حجمی: ۰/۳۵۰۸ نرمی: ۸۰۱/۰	 کسر حجمی: ۰/۳۹۰۸ نرمی: ۶۶۵/۰	 کسر حجمی: ۰/۴۱۰۸ نرمی: ۶۱۴/۴
 کسر حجمی: ۰/۲۹۰۸ نرمی: ۱۲۸۱/۶	 کسر حجمی: ۰/۳۱۰۸ نرمی: ۱۰۱۱/۳	 کسر حجمی: ۰/۳۳۰۸ نرمی: ۸۹۵/۷

با توجه به نتیجه به دست‌آمده برای تیر serpentine مشاهده می‌شود که می‌توان از مش‌بندی غیریکنواخت برای به دست آوردن طرح توپولوژی برای دامنه‌های غیرمحدب استفاده کرد و نمودار پارتو را ردیابی نمود. با استفاده از المان‌های غیریکنواخت می توان به‌راحتی هر دامنه طراحی غیرمحدب و یا دارای بازشو را مدل کرد و نتایج را بررسی نمود. یکی از مشکلات استفاده از شبکه‌های یکنواخت، مشکل گسسته‌سازی دامنه طراحی و دقت در نشان‌دادن بارگذاری و شرایط مرزی است که المان‌های چندضلعی غیریکنواخت، با فراهم کردن گسسته‌سازی انعطاف-پذیرتر در دامنه‌های پیچیده، می‌تواند در گسسته‌سازی بهینه‌سازی توپولوژی کارآمدتر باشد. همچنین با توجه به شکل (۱۸) مشاهده می‌شود که افزایش تعداد المان بر روی نتایج تأثیر زیادی ندارد و می‌توان برای دامنهٔ غیرمحدب نیز با تعداد المان کمتر به نتایج قابل‌قبولی دست‌یافت.

نتیجه‌گیری

با توجه به اینکه روزبه‌روز بر اهمیت بهینه‌سازی در سازه‌ها افزوده می‌شود. مهندسین سازه به دنبال راه-کارهای مناسب و اقتصادی برای یافتن سازه بهینه هستند. استفاده از روش مش‌بندی با المان‌های چند-ضلعی غیریکنواخت این امکان را ایجاد می‌کند که هر نوع سازه با هر شکل و شرایط تکیه‌گاهی را بتوان به‌راحتی مدل نموده و مش بندی و سپس بهینه کرد. با استفاده از بررسی‌های مختلفی که صورت گرفته است، نتایج بهینه‌سازی توپولوژی با استفاده از این مش‌بندی بسیار مناسب‌تر از مش‌بندی‌های مربعی عمل نموده و دیگر به فیلترینگ که یک روش غیراقتصادی است، نیازی نیست. مش‌بندی غیریکنواخت به دلیل کاهش زمان اجرای برنامه تا بیش از یک‌سوم ($\frac{1}{3}$) مقرون‌به‌صرفه است و با مش‌بندی چندضلعی غیریکنواخت می‌توان با تعداد المان کمتر، جواب‌های قابل قبول‌تری را به دست آورد. درنتیجه استفاده از بهینه‌سازی توپولوژی چندهدفه با مش‌بندی غیریکنواخت، راه‌حل‌های بهتر و دقیق‌تری نسبت به مش‌بندی مربعی در اختیار قرار می‌دهد و نمودار پارتو بهبود یافته‌ای را در اختیار کاربران قرار می‌دهد.

مراجع

1. Suresh, K. A., 199-line Matlab code for Pareto-optimal tracing in topology optimization, Structural and Multidisciplinary Optimization, Vol. 42, No. 5, pp. 665-679, (2010).
2. Sigmund, O. and J. Petersson, "Numerical instabilities in topology optimization: a survey on procedures dealing with checkerboards", mesh-dependencies and local minima. Structural optimization, Vol. 16. No. 1, pp. 68-75, (1998).
3. Talischi, C., Paulino, G.H., and Le, C.H., "Topology optimization using Wachspress-type interpolation with hexagonal elements", Multiscale and functionally graded materials, Vol. 973. No. 1, pp. 309-316, (2006).
4. Talischi, C., Paulino, G. H., Pereira, A. and Menezes, I. F., "Polygonal finite elements for topology optimization: a unifying paradigm", *International journal for numerical methods in engineering*, Vol. 82, No. 6, pp. 671-698, (2010).
5. Talischi, C., Paulino, G.H. and Le, C.H., "Honeycomb Wachspress finite elements for structural topology optimization". Structural and Multidisciplinary Optimization, Vol. 37, No. 6, pp. 569-583, (2009).

6. Rozvany, G.I., "A critical review of established methods of structural topology optimization", Structural and Multidisciplinary Optimization, Vol. 37, No. 3, pp. 217-237, (2009).
7. Du, Q., Faber, V. and Gunzburger, M., "Centroidal Voronoi tessellations: applications and algorithms". SIAM review, Vol. 41, No. 4, pp. 637-676, (1999).
8. Talischi, C., Paulino, G.H., Pereira, A. and Menezes, I. F., "PolyMesher: a general-purpose mesh generator for polygonal elements written in Matlab", Structural and Multidisciplinary Optimization, Vol. 45, No. 3, pp. 309-328, (2012).
9. Sieger, D., Alliez, P. and Botsch, M., "Optimizing voronoi diagrams for polygonal finite element computations", in Proceedings of the 19th international meshing roundtable, Springer, pp. 335-350, (2010).
10. Du, Q., Emelianenko, M., and Ju, L., "Convergence of the Lloyd algorithm for computing centroidal Voronoi tessellations", *SIAM journal on numerical analysis*, Vol. 44, No. 1, pp. 102-119, (2006).
۱۱. اکبرزاغی، مهناز، «بهینه‌سازی توپولوژی چندهدفه در سازه‌های پیوسته»، (پایان‌نامهٔ کارشناسی ارشد)، دانشگاه یزد، (۱۳۹٤).
12. Sukumar, N. and Tabarraei, A., "Conforming polygonal finite elements", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 61, No. 12, pp. 2045-2066, (2004).
13. Madeira, J.A., Rodrigues, H. and Pina, H., "Multi-objective optimization of structures topology by genetic algorithms", Advances in Engineering Software, Vol. 36, No. 1, pp. 21-28, (2005).
14. Sigmund, O., "A 99 line topology optimization code written in Matlab", Structural and multidisciplinary optimization, Vol. 21, No. 2, pp.120-127, (2001).
15. Andreassen, E., Clausen, A., Schevenels, M., Lazarov, B. S., and Sigmund, O., "Efficient topology optimization in MATLAB using 88 lines of code", Structural and Multidisciplinary Optimization, Vol. 43, No. 1, pp. 1-16, (2011).
16. Bendsøe, M.P. and Sigmund, O., "Topology optimization: Theory", methods and applications. Springer, Berlin, (2003).
17. Hamda, H., Roudenko, O., and Schoenauer, M., "Application of a multi-objective evolutionary algorithm to topology optimum design", *in Fifth international conference on adaptive computing in design and manufacture*, (2002).
18. Luo, Z., Chen, L., Yang, J., Zhang, Y., and Abdel-Malek, K., "Compliant mechanism design using multi-objective topology optimization scheme of continuum structures", Structural and Multidisciplinary Optimization, Vol. 30, No. 2, pp. 142-15, (2005).